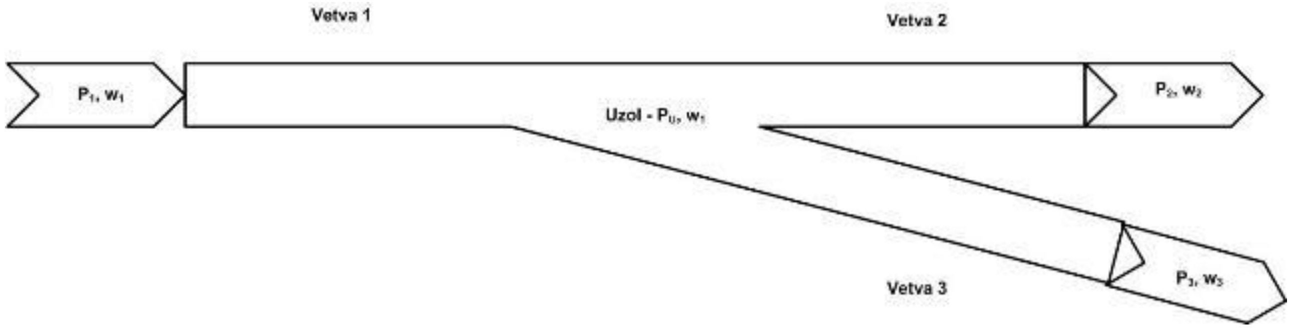
Príklad

Potrubím s priemerom 10 cm má prúdiť 20 m^3h^{-1} vody o teplote 15 ^{0}C. Potrubie sa po 30 m rozvetvuje. Jedna vetva má dĺžku 60 m a priemer 5 cm, druhá dĺžku 50 m a primer 6 cm. Obidve tieto vetvy ústia do atmosféry, kde je tlak 100 kPa. Relatívna drsnosť potrubí je 0,003. Celý potrubný systém je vodorovný, miestne straty možno zanedbať. Vypočítajte, aký tlak má byť na začiatku potrubia a aký bude prietok cez jednu i druhú vetvu.

Teoretický úvod



Celková materiálová bilancia tohto potrubia (Schéma) má tvar:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$
$$\dot{V}_1\rho_1 = \dot{V}_2\rho_2 + \dot{V}_3\rho_3$$
$$w_1 S_1 \rho_1 = w_2 S_2 \rho_2 + w_3 S_3 \rho_3$$
$$ak\ \rho = konst.:$$
$$w_1 S_1 = w_2 S_2 + w_3 S_3$$

Energetické pomery v potrubí môžu byť charakterizované Bernoulliho rovnicami medzi jednotlivými časťami potrubia :

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{P_U}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + \varepsilon_{DS\,1U}\ ;\ \frac{P_U - P_1}{\rho} + \varepsilon_{DS\,1U} = 0$$
$$\frac{P_U}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + \varepsilon_{DS\,U2}\ ;\ \frac{P_2 - P_U}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \varepsilon_{DS\,U2} = 0$$
$$\frac{P_U}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{P_3}{\rho} + \frac{w_3^2}{2} + \varepsilon_{DS\,U3}\ ;\ \frac{P_3 - P_U}{\rho} + \frac{w_3^2 - w_1^2}{2} + \varepsilon_{DS\,U3} = 0$$

Spolu s materiálovou bilanciou:

$$w_1 S_1 - w_2 S_2 - w_3 S_3 = 0$$

dostávame sústavu štyroch nelineárnych rovníc so štyrmi neznámymi: $P_1; P_U; w_2; w_3$

Riešenie

Hlavný program

```
clear all
close all
clc
%zadanie globalnych premennych
global d1 d2 d3 L1 L2 L3 V1 n P2 P3 ro vis w1 Re1 lam1 E1

%zadanie vstupnych parametrov

%priemery vetiev potrubi
d1=0.1;
d2=0.05;
d3=0.06;
%dlzky vetiev potrubi
L1=30;
L2=60;
L3=50;
%vstupny objemovy prietok
V1=20/3600;
%relativna drsnost potrubi
n=0.003;
%tlak na konci vystupnych vetiev (atmosfericky tlak)
P2=100000;
P3=P2;

%vlastnosti vody pri 15 stupnoch celzia

%hustota
ro=999;
%viskozita
vis=1.1404e-3;

%vypocet vstupnej rychlosti prudenia
w1=4*V1/pi/d1^2;

%vypocet Reynoldsoveho cisla v potrubi 1
Re1=w1*ro*d1/vis;

%vypocet koeficienta trenia vo vetve 1
lam1=0.11*(n+68/Re1)^0.25;

%vypocet disipacnej energie vo vetve 1
E1=lam1*L1*w1^2/2/d1;

%vypocet tlaku v uzle a neznamych rychlosti vo vetvach 2 a 3
format long
options = optimset('Display','iter','TolX',1e-10,'TolFun',1e-10);
vysledky=fsolve('vypsiet',[150000 120000 1 1],options)

%vypis vysledkov
%tlak na vstupe
fprintf('\n tlak na vstupe = %8.0f [Pa]\n',vysledky(1))
%objemovy prietok vo vetve 2
fprintf('\n objemovy prietok na vystupe vetvy 2 = %8.4f [m3 s-
1]\n',vysledky(3)*pi*d2^2/4)
%objemovy prietok vo vetve 3
```

```
fprintf('\n objemovy prietok na vystupe vetvy 3 = %8.4f [m3 s-1]\n',vysledky(4)*pi*d3^2/4)
```

```
                                             Norm of      First-order   Trust-
region
 Iteration  Func-count     f(x)              step           optimality    radius
     0          5         852.218                               190
1
     1         10         785.643                 1            83.9
1
     2         15         780.554               2.5            4.11
2.5
     3         20         780.203              6.25           0.541
6.25
     4         25         779.376            15.625          0.0508
15.6
     5         30          777.31           39.0625          0.0279
39.1
     6         35         772.159           97.6562          0.0454
97.7
     7         40         759.354           244.141           0.031
244
     8         45         727.811           610.352          0.0479
610
     9         50         651.878           1525.88          0.0258
1.53e+003
    10         55         480.325            3814.7          0.0599
3.81e+003
    11         60          165.76           9536.74          0.0978
9.54e+003
    12         65     7.42744e-005          13567.8           0.212
2.38e+004
    13         70     6.20107e-022          8.61674       3.04e-010
3.39e+004
    14         75     2.46913e-028      1.8114e-008       3.72e-013
3.39e+004
Optimization terminated: first-order optimality is less than
options.TolFun.

vysledky =

  1.0e+005 *

   1.20583187123911   1.18496527461859   0.00001032649449
0.00001247758168


 tlak na vstupe =   120583 [Pa]

 objemovy prietok na vystupe vetvy 2 =   0.0020 [m3 s-1]

 objemovy prietok na vystupe vetvy 3 =   0.0035 [m3 s-1]
```

Vedľajší program

```
%zadanie funkcie
function ff = vypsiet(x)
%volanie globalnych premennych zadanych v hlavnom programe siet.m
global d1 d2 d3 L1 L2 L3 V1 n P2 P3 ro vis w1 Re1 lam1 E1
%priradenie premennych
P1=x(1);
Pu=x(2);
```

```
w2=x(3);
w3=x(4);
%vypocet Reynoldsovych cisel vo vetvach 2 a 3
Re2=d2*ro*w2/vis;
Re3=d3*ro*w3/vis;
%vypocet koeficienta trenia vo vetvach 2 a 3
lam2=0.11*(n+68/Re2)^0.25;
lam3=0.11*(n+68/Re3)^0.25;
%vypocet disipacnych energii vo vetvach 2 a 3
E2=lam2*L2*w2^2/2/d2;
E3=lam3*L3*w3^2/2/d3;
%zadanie rovnic (v tvare f(x)=0;Bernouliho rovnice(ff(1)-ff(3))+materialova
bilancia uzla(ff(4))
ff(1)=(Pu-P1)/ro+E1;
ff(2)=(P2-Pu)/ro+(w2^2-w1^2)/2+E2;
ff(3)=(P3-Pu)/ro+(w3^2-w1^2)/2+E3;
ff(4)=w1*pi*d1^2/4-w2*pi*d2^2/4-w3*pi*d3^2/4;
```

Potrubné siete - Metóda Hardy Cros (iteračná metóda)

Bernoulliho rovnice popisujúce okruhy:

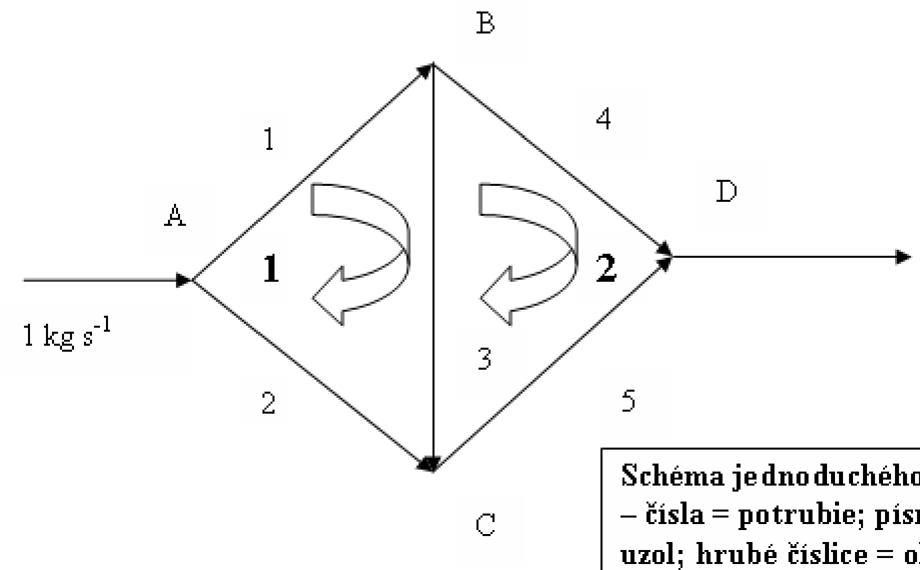


Schéma jednoduchého okruhu – čísla = potrubie; písmená = uzol; hrubé číslice = okruh

Princíp metódy Hardy Cros:

Iteračný krok

$1.\ okruh$

$$\frac{w_A^2}{2g}+\frac{p_A}{\rho g}+z_A=\frac{w_B^2}{2g}+\frac{p_B}{\rho g}+z_B+h_{DIS1}$$

$$\frac{w_B^2}{2g}+\frac{p_B}{\rho g}+z_B=\frac{w_C^2}{2g}+\frac{p_C}{\rho g}+z_C+h_{DIS3}\quad /(+)$$

$$\frac{w_A^2}{2g}+\frac{p_A}{\rho g}+z_A=\frac{w_C^2}{2g}+\frac{p_C}{\rho g}+z_C+h_{DIS2}\quad /(-)$$

$$0=h_{DIS1}+h_{DIS3}-h_{DIS2}$$

$2.\ okruh$

$$\frac{w_B^2}{2g}+\frac{p_B}{\rho g}+z_B=\frac{w_D^2}{2g}+\frac{p_D}{\rho g}+z_D+h_{DIS4}$$

$$\frac{w_C^2}{2g}+\frac{p_C}{\rho g}+z_C=\frac{w_D^2}{2g}+\frac{p_D}{\rho g}+z_D+h_{DIS5}\quad /(-)$$

$$\frac{w_B^2}{2g}+\frac{p_B}{\rho g}+z_B=\frac{w_C^2}{2g}+\frac{p_C}{\rho g}+z_C+h_{DIS3}\quad /(-)$$

$$0=h_{DIS4}-h_{DIS5}-h_{DIS3}$$

všeobecne :

$$\sum_i\sum_j h_{DISi,j}M_{i,j}=0 \qquad kde\ \ i-potrubie;\ j-okruh$$

$$M_{i,j}\in\{-1;0;1\}$$

ak $M_{i,j}=-1$; *ak predpokladáme že v* $i-$*tom potrubí a* $j-$*tom okruhu*

prúdi voda proti smeru vyznačenom šípkou

ak $M_{i,j}=1$; *ak predpokladáme že v* $i-$*tom potrubí a* $j-$*tom okruhu*

prúdi voda v smere vyznačenom šípkou

ak $M_{i,j}=0$; *ak v* $i-$*tom potrubí a* $j-$*tom okruhu voda neprúdi*

$$h_{DISi}=\frac{\lambda_i L_i 8\dot{V}_i^2}{d_i^5 g\pi^2}=\lambda_i K_i\dot{V}_i^2 \quad kde\ K_i=\frac{L_i 8}{d_i^5 g\pi^2}=konšt.$$

$$\dot{V}_{i,k+1} = \dot{V}_{i,k} + \sum_{i} \sum_{j} \Delta_{j} M_{i,j}$$

dosadením do výsledných Bernoulliho rovníc a zanedbaním

$\Delta_j^2 = 0$ *dostávame :*

$$\Delta_j = -\frac{\sum_{i} \sum_{j} M_{i,j} \lambda_i K_i \dot{V}_i^2}{2 \sum_{i} \sum_{j} \left| M_{i,j} \right| \lambda_i K_i \dot{V}_i}$$

iteračným kritériom je :

$$podmienka \leq \sum_{i} \sum_{j} \Delta_j M_{i,j} \quad ; napr.\ podmienka = 1e^{-18}$$

Riešenie v Matlabe