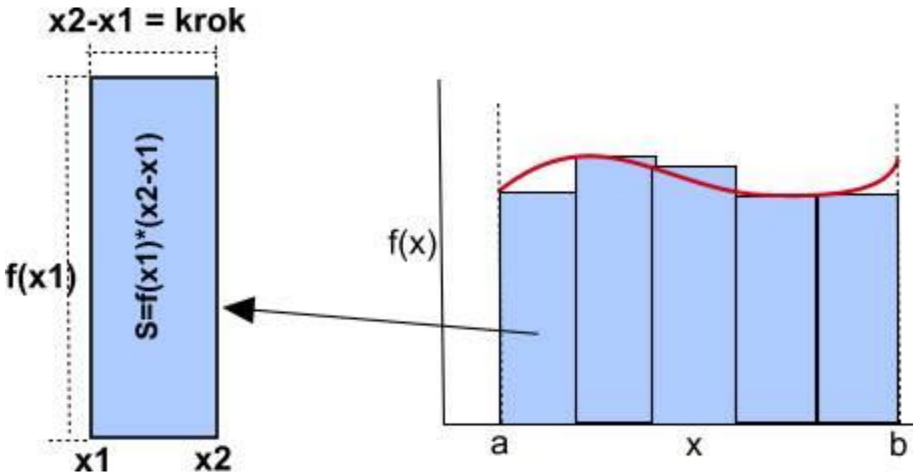
Numerický výpočet integrálu

Na tejto hodine si ukážeme niekoľko základných spôsobov akými je možné vypočítať hodnotu určitého integrálu v MATLABe. V prvej časti si predstavíme dva najjednoduchšie spôsoby výpočtu integrálu: obdĺžnikovú a lichobežníkovú metódu. Ďalej si ukážeme ako je možné vypočítať hodnotu určitého integrálu pomocou zabudovanej funkcie v MATLABe.

Obdĺžniková metóda

Ako už bolo spomenuté, obdlžníková metóda patrí medzi najjednoduchšie spôsoby výpočtu určitého integrálu. Jej odvodenie (ale i samotné použitie) priamo vychádza z geometrickej interpretácie určitého integrálu, ktorá hovorí, že hodnota určitého integrálu funkcie ***f(x)*** na intervale ***<a,b>*** je v skutočnosti obsah plochy „pod krivkou" ***f(x)*** t.j. obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie ***f(x)*** a osou ***x***.
Nasledujúci obrázok schematický znázorňuje spôsob, akým je možné vypočítať určitý integrál pomocou obdĺžnikovej metódy:



Interval ***<a,b>***, na ktorom chceme vypočítať určitý integrál rozdelíme na ***n*** rovnakých dielikov. Pre každý takto zvolený dielik vypočítame plochu. Vzorec na výpočet zvolenej „čiastkovej" plochy je znázornený na vyššie uvedenom obrázku. Vzhľadom na to, že potrebujeme vypočítať celkovú plochu na konečnom intervale ***<a,b>***, musíme dané „čiastkové" plochy spočítať. Ak by sme takto opísaný algoritmus chceli zapísať matematicky, vyzeralo by to nasledovne:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

<u>Príklad 1</u>

Zostrojíme si jednoduchý príklad, v ktorom budeme chcieť vypočítať určitý integrál funkcie **sin(x)** na intervale **<0,2*pi>**. Podobne ako na predchádzajúcej hodine (keď sme počítali hodnotu prvej derivácie), program, ktorý zostrojíme sa bude skladať z dvoch funkcií. V prvej bude definovaná naša funkcia (v tomto prípade funkcia sin(x)) a druhá funkcia bude zabezpečovať samotný výpočet určitého integrálu. Zdrojový kód by mohol vyzerať nasledujúco:

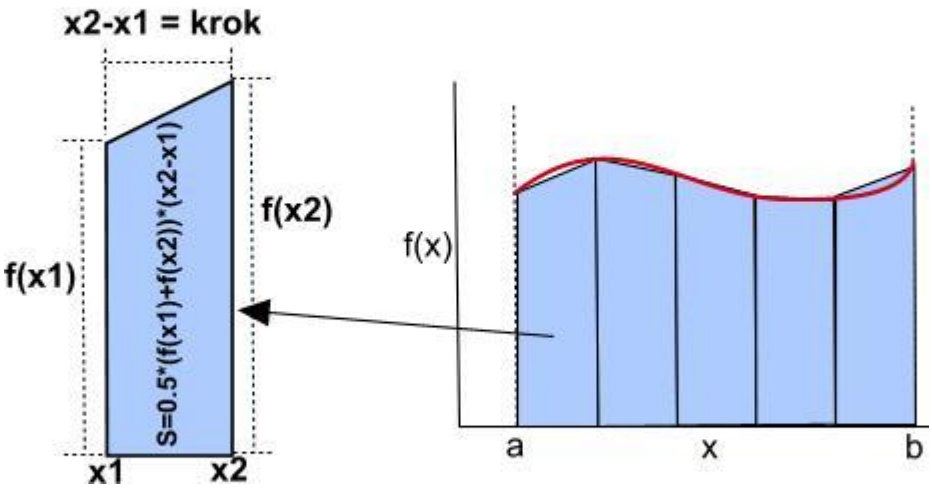
```
function main
integral(0,2*pi,100)

function [I]=integral(a,b,n)
x=linspace(a,b,n);
suma=0;
for i=1:(n-1)
suma=suma+funkcia(x(i));
end
I=((b-a)/n)*suma;

function [Fx]=funkcia(x)
Fx=sin(x);
```

Lichobežníková metóda

Lichobežníková metóda je veľmi podobná obdĺžnikovej metóde, s tým rozdielom, že lepším spôsobom aproximuje tvar plochy pod krivkou. Schématický je možné lichbežníkovú metódu znázorniť následujúco:



Celý postup výpočtu je obdobný s výpočtom v prípade obdĺžnikovej metódy, preto sa v tomto prípade nebudeme ďalej venovať spôsobu výpočtu, len si uvedieme matematický zápis lichobežníkovej metódy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right)$$

Príklad 2

Zostrojte program na výpočet určitého integrálu použitím lichobežníkovej metódy. Funkcia a interval sú rovnaké ako v predchádzajúcom príklade.

```
function main
integral(0,2*pi,1000)

function [I]=integral(a,b,n)
x=linspace(a,b,n);
suma=0;
for i=2:(n-1)
suma=suma+funkcia(x(i));
end
suma=suma+0.5*funkcia(x(1));
suma=suma+0.5*funkcia(x(n));

I=((b-a)/n)*suma;

function [Fx]=funkcia(x)
Fx=sin(x);
```

Uvedené metódy sú v podstate veľmi jednoduché a ich presnosť je pre väčšinu chemicko-inžinierskych výpočtov postačujúca.
My si teraz však ukážeme, akým spôsobom je možné vypočítať hodnoty určitého integrálu ľubovoľnej funkcie pomocou zabudovanej funkcie v MATLABe. Výpočet určitého integrálu je možné v MATLABe vykonať pomocou funkcie **quad**.

Od teraz si budeme pamätať !!!

Na výpočet určitého integrálu sa v MATLABe používa funkcia **quad**.

Prototyp

I=quad(@funkcia,a,b)

kde **funkcia** je identifikátor nami vytvorenej funkcie, v ktorej je zadefinovaná závislosť f(x), ktorej určitý integrál chceme vypočítať. **a** a **b** sú dolná a horná hranica integrálu

Príklad použitia

```
function main
I=quad(@funkcia,0,10)

function [Fx]=funkcia(x)
Fx=x.^3+5*x;
```

Úvod do symbolických výpočtov

Všetky naše výpočty, ktoré sme doteraz používali je možné zaradiť do určitej spoločnej kategórie – kategórie numerických výpočtov. Na tejto hodine si ukážeme základy využitia **symbolic toolboxu**, ktorý včleňuje symbolické výpočty do prostredia MATLABu. Využitie tohto toolboxu je veľmi široké (podobne ako väčšiny toolboxov v MATLABe). Uvedený toolbox umožňuje výpočty derivácii, integrálov, limít, rozvoj do Taylorového radu, riešenie lineárnych rovníc, výpočet inverzných matíc, determinantov, výpočet vlastných čísiel matice, zjednodušenie algebraických výrazov, umožňuje riešenie algebraických a diferenciálnych rovníc a mnoho iného.

Predtým ako si ukážeme využitie niektorých funkcií z uvedeného toolboxu, je nutné si povedať niečo o samotnej tvorbe symbolických objektov.
Symbolické objekty je možné považovať za špeciálny datový typ MATLABu. Na jednoduchom príklade si ukážeme rozdiel medzi bežným a symbolickým číslom. V našom prípade číslo ***a*** bude bežné reálne číslo a číslo ***b*** vytvoríme ako symbolickú premennú, budeme počítať druhú odmocninu z našich premenných a uvidíme rozdiel vo výsledkoch.

```
>> a=2

a =

2

>> sqrt(a)

ans =

1.4142

>> b=sym(2)

b =

2

>> sqrt(b)

ans =

2^(1/2)
```

Ako je zjavné pri použití symbolickej hodnoty, MATLAB nevrátil reálnu hodnotu druhej odmocniny, ale symbolickú hodnotu. V prípade, že by sme skutočne potrebovali získať reálnu hodnotu, môžeme použiť funkciu **vpa**, ktorá zjednodušene povedané získa numerickú hodnotu:

Prototyp

vpa(symbolicka_premenna,pocet_zobrazenych_cislic)

```
>> b=sym(2)

b =

2

>>c=sqrt(b)
>>vpa(c,5)
ans =

1.4142
```

Takýto postup má niekedy výhody pri počítaní so zlomkami, napr.:

```
>> sym(2/5)+sym(1/4)+sym(2/3)
ans =

79/60
```

Tvorba symbolických výrazov

Teraz sa budeme venovať o niečo zložitejším symbolickým objektom a to výrazom. V podstate existujú dva rôzne spôsoby ako vytvoriť symbolický výraz. Vytvorme si symbolický výraz a.x+b:

```
a=sym('a')
b=sym('b')
x=sym('x')

f=a*x+b
f =

b + a*x
```

Druhý spôsob:

```
syms a b x
f=a*x+b
f =

b + a*x
```

Oba tieto spôsoby sú rovnocenné, rozdiel je len v spôsobe zápisu. Nakoľko druhý spôsob je kratší, budeme ho uprednostňovať.
POZOR: Uvedomte si, že v druhom prípade sme použili príkaz **syms** (nezamieňajte si ich).

Výpočet derivácie

Teraz našu pozornosť upriamime na výpočet derivácie.

Príklad 1

Vypočítajte prvú deriváciu funkcie sin(2*x*).

```
syms x
f=sin(2*x);
diff(f)
```

výsledok by nás nemal prekvapiť:

ans =

2*cos(2*x)

Od teraz si budeme pamätať !!!

Na výpočet prvej derivácie sa používa príkaz **diff.**

Príklad použitia:

```
syms x
f=cos(x^2);
diff(f)

syms x a b
f=a*x^3+b*x^2;
diff(f,x)
diff(f,a)

Poznámka: druhý parameter v tomto prípade znamená derivácia
podľa danej premennej.
```

Výpočet integrálu

Príklad 1

Vypočítajte neurčitý integrál funkcie cos(2*x*).

```
syms x
f=cos(2*x);
int(f)
```

Výsledok vyzerá nasledujúco:
1/2*sin(2*x)

Samozrejme, že je možné vypočítať aj priamo určitý integrál:

Príklad 2

Vypočítajte určitý integrál funkcie cos(2*x) na intervale <0,3.14>.

```
syms x
f=cos(2*x);
int(f,0,3.14)
```

Od teraz si budeme pamätať !!!

Na výpočet integrálu funkcie sa používa príkaz **int.**

Príklad použitia:
syms x
```
f1=sin(x)^2
int(f1)

syms x
f2=x^2-log(x);
int(f2,0,2)
```

Výpočet limity funkcie

Symbolic toolbox umožňuje jednoduchým spôsobom vypočítať aj hodnoty limít funkcií.

Príklad 1

Vypočítajte hodnoty limít: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

```
syms x
f=sin(x)/x
limit(f,inf)
limit(f,0)
```

Od teraz si budeme pamätať !!!

Na výpočet limity funkcie sa používa príkaz **limit.**

Príklad použitia:
```
syms x h
limit(sin(x)/x,0)
limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0) % špecifikácia h->0
```